ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 16.12.2023

Краткая историческая справка

Символ интеграл введен Лейбницем в 1675 году. Он является изменением латинской буквы S. Слово интеграл придумал И. Бернулли. Оно означает «приводить прежнее состояние», «восстанавливать».

Новый материал (конспект в тетрадь)

Тема: «Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница»

Неопределенный интеграл

Определение:неопределенным интегралом функцииf называют множество первообразных этой функции

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{, где}$$

f(x) dx подынтегральное выражение,
f(x) подынтегральная функция,
dx знак дифференциала указывает, какая переменная входящая в выражение f(x) является аргументом,dx присутствует там, где есть символ $\int$

Правила интегрирования

Первое правило: интеграл от суммы функции равен сумме интегралов этих функций

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Второе правило: постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Третье правило: чтобы найти интеграл от сложной функции, надо воспользоваться формулой:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

Примеры: вычислить неопределенныеинтегралы

$\int x^3dx=\frac{x^4}{4} + C$

$\int sinxdx= -cosx+C$

$\int 3e^x dx=3e^x+C$

$\int 5dx=5x+C$

$\int e^{4x+1}dx=\frac{1}{4}e^{4x+1} + C$

Определенный интеграл

Определение: определенным интегралом $\int_a^b f(x)$ в пределах от ***а*** до ***в*** от функции *f(x),* непрерывной на отрезке [*а, в*], называется приращение любой ее первообразной F(x) при изменении аргумента x от значения ***x=a*** до ***x=в***:

$$\int_a^в f(x)\partial x = F(x)\Big|_a^b = F(в) - F(a).$$

Данная формула называется **формулой Ньютона-Лейбница**, ее называют **основной формулой интегрального исчисления**

Краткая историческая справка

В 1708 году вспыхнул печально известный спор Лейбница с Ньютоном о научном приоритете открытия дифференциального исчисления. Известно, что Лейбниц и Ньютон работали над дифференциальным исчислением. Известно также, что Ньютон создал свою версию математического анализа, «метода флюксий», хоть и опубликовал свои результаты лишь много лет спустя; Лейбниц же первым опубликовал исчисление бесконечно малых и разработал символику, которая оказалась настолько удобной, что ее используют и на сегодняшний день. Поэтому эту формулу называют **формулой Ньютона – Лейбница**

Примеры:

$$\int_{-1}^{2} x^2\,\partial x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8+1}{3} = \frac{9}{3} = 3;$$

$$\int_0^1 (x - 3x^2)\partial x = \int_0^1 x\partial x - \int_0^1 3x^2\partial x = (\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = (\frac{1^2}{2} - 1^3) - (\frac{0^2}{2} - 0^3) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \quad ;$$

$$\int_2^3 \frac{\partial x}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\ \Big|_2^3 = \frac{1}{2}(\ln|2\cdot 3-1| - \ln|2\cdot 2-1|) = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\cdot\partial x = -\frac{1}{2}\sin 2x\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} - \sin 2\cdot 0) = -\frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = -\frac{1}{2}(0-0) = 0;$$

Введя понятие определенного интеграла, мы можем переписать формулы, полученные при решении наших задач.

Площадь криволинейной трапеции можно найти так:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

В этом состоит **геометрический смысл** определенного интеграла.

Пример:

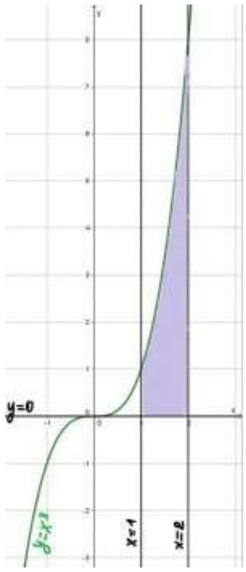
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=x^3$, y = 0, x=1, x=2.

1). Построим таблицу значений

x	1	2	3
y	1	8	27

2). Построим график функции на заданном участке.



3). Ограничим нашу фигуру снизу, слева и справа.

4). Вычислим площадь получившейся криволинейной трапеции:

$$S = \int_1^2 x^3 dx = \left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} = 3,75(\text{кв.ед.})$$

Ответ: 3,75 кв.ед.

Определение перемещения материальной точки, движущейся по прямой со скоростью*v(t)*, за промежуток времени *[a; b]* можно записать так:

$$\boxed{s = \int_a^b v(t)dt}$$

В этом заключается**физический смысл**определенного интеграла.

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru

Для работы удобно использовать первообразные и неопределённые интегралы, приведённые в таблице (представлена ниже), которые принято называть*табличными первообразными*и*табличными интегралами*.Можно распечатать и вклеить в тетрадь

№	f(x)	F(x) + C	∫ f(x) dx = F(x) + C
1	0	C	$\int 0\,dx = C$
2	k	$kx + C$	$\int kdx = kx + C$
3	$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
5	$sin\,x$	$-\cos x + C$	$\int sin\,x\,dx = -\cos x + C$
6	$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x\,\,dx = \sin x + C$
7	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\,x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x + C$
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\,ctg\,x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\,ctg\,x + C$
9	e^x	$e^x + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
10	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
11	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
12	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
13	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\,x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\,x + C$
14	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C$	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C$
15	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert + C$
16	$\frac{1}{x^2-a^2}\ (a \neq 0)$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
17	$tg\,x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int tg\,x\,\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
18	$ctg\,x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int ctg\,x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
19	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$
20	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$